Keplersche Fassregel

Spickzettel Aufgaben Lösungen PLUS

Die **Keplersche Fassregel**, auch Simpsonregel genannt, ist ein Verfahren, mit Hilfe dessen du das Integral über eine Funktion auf dem Intervall $[a, b]$ näherungsweise bestimmen kannst. Dies kannst du zum Beispiel dann benutzen, wenn du von der Funktion f keine Stammfunktion bilden kannst.

Zur Annäherung des Integrals mit Hilfe der Kepler'schen Fassregel, benötigst du lediglich die Gleichung der Funktion f, sowie die Funktionswerte der Funktion f an den Stellen a, b und $\dfrac{a+b}{2}$. Für das Integral über die Funktion f ergibt sich nun:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{6} \cdot \left(f(a) + 4 \cdot f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)}$$

Beispiel:

Gesucht sei das Integral über die Funktion $f(x) = e^{-x^2}$ auf dem Intervall $[0, 2]$. Zu e^{-x^2} kannst du keine Stammfunktion angeben, weshalb du zur näherungsweisen Berechnung von $\int_0^2 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ die Kepler'sche Fassregel anwenden kannst:

1. Berechne die Funktionswerte an den Stellen a, b und $\frac{a+b}{2}$
2. Setze die berechneten Funktionswerte in die Simpsonformel ein und berechne das Ergebnis

1. Schritt:

Das Intervall $[a, b]$ ist in unserem Beispiel $[0, 2]$. Folglich musst du nun die Funktionswerte an den Stellen $x = 0$, $x = 2$, und $x = \dfrac{0+2}{2} = 1$ berechnen:

- $f(0) = e^{-0^2} = 1$
- $f(2) = e^{-2^2} = e^{-4}$
- $f(1) = e^{-1^2} = e^{-1}$

2. Schritt:

Einsetzen in die Simpsonformel liefert dir nun:

$$\frac{b-a}{6} \cdot \left(f(a) + 4 \cdot f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(1 + 4 \cdot e^{-1} + e^{-4}\right)$$

Somit ist $\dfrac{1}{3} \cdot \left(1 + 4 \cdot e^{-1} + e^{-4}\right)$ eine näherungsweise Darstellung des Integrals $\int_0^2 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$